

٥. معادلة فوكس :

إذا كانت جميع النقاط ارتداداً للمعادلة التفاضلية:

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad [1]$$

هي نقاط معادلة نظامية وكانت نقطة اللامائية ($z = \infty$) على الأكر نقطة معادلة نظامية فإننا نسمي المعادلة [1] معادلة معادلة فوكس

مثال: فالمعادلة التالية :

$$z^2(1-z)^2w'' + z(1-z^3)w' + (1-z^2)w = 0 \quad [2]$$

هي معادلة فوكس لأن النقط المصادفة المنفصلة لها هي: $[z=0, z=1]$ لا مصادف [وكل من هاتين النقطتين هي نقطة معادلة نظامية. اعتبر ذلك.

أما $z = \infty$ فهي من الرتبة الأولى لـ $p(z)$ و هي من الرتبة الثانية لـ $q(z)$ (لاحظ ذلك) [لاحظ ذلك بعد التفسير في المثال ١١]
 معاً إذن نقطة معادلة نظامية أيضاً للمعادلة.

٦. ١ معادلة فوكس ذات نقطة معادلة واحدة :

عندما يكون للمعادلة [1] نقطة معادلة واحدة هي a بالقرين عندئذ يكون (بالقرين) بالتكرار

$$\left[p(z) = \frac{A}{z-a}, q(z) = \frac{B}{z-a} + \frac{C}{(z-a)^2} \right] \quad [3]$$

وأمثلاً إلى تعريف $p(z), q(z)$ في معادلة فوكس فإنه من الواجب أن يكون هنا $B=0$ [لتتحقق شرط النقطة المصادفة النظامية]

والتالي المعادلة (4) في هذه الحالة تأخذ الشكل التالي

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{C}{(z-a)^2} w = 0 \quad (4)$$

وبما أنه ينبغي أن تكون نقطة اللانهاية نقطة مفردة منتظمة بالترتيب، يجب أن نؤولها إلى نقطة مفردة منتظمة يمكن أن تكون للمعادلة نقطة مفردة واحدة فقط.

من أجل ذلك يجب أن يتحقق الشرط: $2K \rightarrow 2$

$$2 \rightarrow \infty$$

وإذاً تكون نقطة اللانهاية نقطة مفردة منتظمة الخامسة يمكن أن نؤولها إلى

لـ $9(z)$ ويكون هذا الأساسيات $[A=2, C=0]$ والمعادلة تأخذ

الشكل التالي: $w'' + \frac{2}{z-a} w' = 0$ وهي معادلة فوكس ذات نقطة مفردة منتظمة واحدة.

وهل هذه المعادلة $9(z)$ $w'' + \frac{2}{z-a} w' = 0$ هي $9(z)$ $w'' + \frac{2}{z-a} w' = 0$ اختياريات

2.6 معادلة فوكس بقطبين متماثلين:

المعادلة السابقة (4) هي معادلة فوكس بقطبين متماثلين هما

$[z=0, z=\infty]$ وتكون من الشكل:

$$w'' + \frac{A}{z-a} w' + \frac{C}{(z-a)^2} w = 0 \quad (4)$$

وتتحول إلى معادلة ذات أمثال ثابت وذلك بإجراء التحويل التالي

$$z = \frac{1}{z-a}$$

3.6 معادلة فوكس بالمعادلة فوق الهندسية:

نفس معادلة فوكس بثلاث نقاط مفردة منتظمة فوكس أو المعادلة

فوق الهندسية هذه الشكل الشاذ الهندسية هي $(0, 1, \infty)$ وهي

من الشكل (معادلة فوكس)

$$2(z-1)w'' + [-\gamma + (1+\alpha+\beta)z]w' + \alpha\beta w = 0 \quad (5)$$

Subject:

Date:



والجاءت من حل لهذه المعادلة في جوار النقطة الساكنة التالية من أجل ذلك نفرض أن الحل من الشكل ليس بسيط

$$[w = z^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda}] ; c_0 \neq 0$$

نستف من هذه العلاقة ان قيمة مرتبة λ بالنسبة لـ z ونقول في (5)

فنعزل تلك العلاقة التالية:

$$\underbrace{(z^2 - z)}_{\text{بعض المصطلحات}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda-2} + (-\delta + (1+\alpha+\beta)z) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda-1} + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda} = 0$$

ومن ملاحظة [توزيع المتغيرات] ان داخل القوسين

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) c_n z^{n+\lambda-1}$$

$$- \delta \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda-1} + (1+\alpha+\beta) \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) c_n z^{n+\lambda} + \alpha\beta \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+\lambda} = 0$$

وهنا بالتجميع الحدود ومن ثوب z :

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (1+\alpha+\beta)(n+\lambda) + \alpha\beta] c_n z^{n+\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-1) - \delta(n+\lambda)] c_n z^{n+\lambda-1} = 0$$

(*)

والآن لإيجاد المعادلة المميزة للمشتق نضرب z في الطرفين الصفر (عندما $n=0$) فنحصل على المعادلة:

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-1) + \delta\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \delta\lambda = 0 \quad \text{و} \quad c_0 \neq 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + \delta\lambda = 0 \quad \text{أو} \quad \lambda(\lambda - \delta - 1) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 - \delta \end{array} \right\} \quad \text{اذن الجذور هما} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 - \delta \end{array} \right.$$

[ملاحظة: الفرق بين λ_1 و λ_2 ليس عدداً صحيحاً]

ولإيجاد القانون التوريحي نبدأ في المجموع التالي (A) كما $n \geq 1$ $(n+1)$ فنجد من جديد:

3

Subject:

Date:



$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(n+\lambda)(n+\lambda-1) + (1+\alpha+\beta)(n+\lambda) + \alpha\beta] c_n z^{n+\lambda}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\lambda+1)(n+\lambda) + \delta(n+\lambda+1)] c_{n+1} z^{n+\lambda} = 0$$

دالات بالمطابقة وجعل افان $z^{n+\lambda}$ مادي للمخرج نجد

$$c_{n+1} = \frac{(n+\lambda+\alpha)(n+\lambda+\beta)}{(n+\lambda+1)(n+\lambda+\delta)} c_n, \quad \forall n \geq 0 \quad (T)$$

ملاحظة: بينما $\alpha = -1$ يمكن ان نحاله لانه موجود في اضافة المعيرة للمنتج.

الا λ ما اجل $\lambda = 0$ نجد الدستور التوريثي الموافق لـ $\lambda = 0$.

$$(T) \Rightarrow c_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\delta)} c_n, \quad \forall n \geq 0$$

والذي نعبر التواتر كما يلي ونف هذا الدستور التوريثي لـ $\lambda = 0$.

$$n=0 \Rightarrow c_1 = \frac{\alpha\beta}{\delta} c_0$$

$$n=1 \Rightarrow c_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\delta(\delta+1)} c_0$$

ومما

$$n=n-1 \Rightarrow c_n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot \delta(\delta+1) \dots (\delta+n-1)} c_0$$

ومما لـ $\lambda = 0$:

$$c_n = \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\delta)_n} c_0$$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$$

حيث

$$(\beta)_n = \beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)$$

4

Subject:

Date:

$$(x)_n = x(x+1) \dots (x+n-1)$$

و x لا يساوي الا صفر اذ أي عدد مجموع سالب رياضي ايه
 ا- x يجب ان اقل الواحد لـ $x=0$ (البداية اول) صيغة التكرار

$$W_1 = Z^0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n \rightarrow W_1 = 1 + \frac{x\beta}{x} Z + \dots + \frac{(x)(\beta)}{n(x)} Z^n \quad (*)$$

ونعبر للطرف الايمن صيغ $(*)$ $F(x, \beta, x, Z)$ ويسمى
 صيغ $x=1-x$ فترات التكرار التوابعي المتوافق مع A هي

$$(*) \Rightarrow C_{n+1} = \frac{(1-x+n+\alpha)(1-x+n+\beta)}{(n+1)(n+2-x)} C_n \quad \forall n \geq 0$$

وبالتالي كما سبق نجد:

$$C_n = \frac{(x-x+1)n \cdot (\beta-x+1)n}{n! (2-x)n}$$

وهذه يكون الحد الثاني للمعادلة (المعادلة الثانية) ونعبر عن x لا يساوي
 أي عدد مجموع موجب أكبر من (2) هو:

$$W_2 = C_1 Z^{1-x} F(x-x+1, \beta-x+1, 2-x, Z)$$

واخيراً انقى العام للمعادلة نعبر ان x لا يساوي أي عدد مجموع
 هو:

$$W = C_1 F(x, \beta, x, Z) + C_2 Z^{1-x} F(x-x+1, \beta-x+1, 2-x, Z)$$

حيث C_1 و C_2 ثوابت اختيارية.

7. معادلة لوصف التفاضلية:

في الفقرة السابقة نالها حل معادلة نحصل بفرص ان الفرق بين هذين
 المعادلات المعينة لا يساوي أي عدد مجموع.

والآن سنقدر مع معادلة صيغة معادلة نحصل ولكي لا يتحقق
 فيها هذا الشرط رعي معادلة لوصف التفاضلية في

[فيما الفرق = عدد مجموع]

Subject:

Date:



حيث n عدد صحيح (1) $(1-z^2)w'' - 2zw' + n(n+1)w = 0$
 إن النقاط الشاذة لهذه المعادلة (2) هي $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ وهما
 نقاط شاذة منتظمة (3) (غير ذلك).

ولتوجد انك لهذه المعادلة (لا يوجد) محور التفرع الشاذة النظامية n m
 من أجل ذلك نبحث القوييل الثاني:

$$2-1 = -2t \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Z = 1-t \Rightarrow Z^2 = 1-4t+4t^2$$

وكذلك يكون w و w' انك:

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = -\frac{1}{2} w'$$

$$w'' = \frac{1}{4} w''$$

نقوم بكتابة في المعادلة (1) عند:

$$\Rightarrow (4t-4t^2) \frac{1}{4} w'' - 2(1-2t) \left(-\frac{1}{2}\right) w' + n(n+1)w = 0$$

إلا فنقسمار والاضرب بـ 4 - المعادلة نجد:

$$t(t-1)w'' + [-1+2t]w' + n(n+1)w = 0 \quad (2)$$

وهي معادلة فريد السابعة، حيث بالاعتماد مع معادلة فريد نجد:

$$[2(Z-1)w'' + (-\lambda + (1+\lambda+B)Z)w + dAw = 0] \quad (3)$$

$$\lambda = 1, B = -n, d = 1+n$$

وبالتالي فالمعادلة (1) تقبل حل فريد من الشكل:

$$\Rightarrow w = F\left(\frac{1}{2}(1+n), -n, 1, (1-z)\right) \quad (4)$$

وبما أن $\lambda = 1$ في هذه الحالة فالمعادلة المعبرة لتتفق لها صفر فها نحن

صو الصفر، ولإيجاد حل آخر للمعادلة (1) لومندور نقوم، بإجراء التحويل

التالي: (5) $w = u$ وهو حل ما بـ ثاب حيث u حالة معروفة وذلك فبينا

Subject:

Date:

لتعريف u مشتق العلاقة الذي يربط بالنسبة لـ x ونحوه في المعادلة (2)
 فنحصل على المعادلة: $u' = \frac{-2w_1}{1-2t} = \frac{-2w_1}{1-2t}$
 $u' = \frac{-2w_1}{1-2t}$

نكامل العلاقة كنهاية ثلاث مائة وبعد الثابت C وبأول المعادلة المعادلة:

لـ u المعادلة ونخرج اللوغاريتم \ln من الطرفين: $u = \frac{1}{w_1^2 (1-t)}$

ولكن $u = w_1$: $w_1 = \sqrt{1-t}$ (أ) $w_1 = \sqrt{1-t}$
 وكما هو معلوم من (أ)

من (أ) $\Rightarrow w_1 = 1 - \frac{n(n+1)}{2} t$

$w_1^2 = [1 - 2n(n+1)t] \dots$

دالة $u = \frac{1}{w_1^2} \frac{dt}{[1 - 2n(n+1)t] (1-t)}$ $\Rightarrow u = \int \frac{dt}{[1 - 2n(n+1)t] (1-t)} + A_0$

من A_0 فقد استنتجنا من الجدول الثاني للمعادلة (1) هو:

$w_2 = w_1 \cdot u = w_1 \int \frac{dt}{[1 - 2n(n+1)t] (1-t)} + A_0$

وهو حل مستقل عن الحد الأول w_1 و $t = (1-2)/2$

إذاً العمل العام لمعادلة لوسور (1) في جوار النقطة استاذ النظام

أ. 2 هو: $w_2 = C_1 w_1 + C_2 w_2$

من (1) نأخذ استنتاجاً

ملاحظة: من أجل الجوار للمعادلة لوسور (1) في جوار النقطة استاذ

النظام هو: $w_2 = A w_1 + B w_2$

من A و B نأخذ استنتاجاً